Schrodinger operators with n positive eigenvalues : an explicit construction involving complex valued potentials (Mathematical Aspects of Quantum Fields and Related Topics)

棋田, 登美男

数理解析研究所講究録
第2010巻 2016年 56-60

Schrödinger operators with n positive eigenvalues: an explicit construction involving complex valued potentials*

兵庫県立大学物質理学研究科　　梅田登美男
Tomio Umeda
Departments of Mathematical Sciences, University of Hyogo

1. 序

本稿の目的は n 個の正固有値を持つシュレディンガー作用素を構成することである．初めに，歴史的な経緯を von Neumann–Wigner [9] まで遡って振り返る．

正の固有値を持つシュレディンガー作用素を初めて構成したのは von Neumann–Wigner [9] である．彼らは正固有値1を持つシュレディンガー作用素を次のように構成した：

【$r:=|x|$, $x\in\mathbb{R}^3$, に対して

$$V(r):=-\frac{32\sin r}{\{1+\gamma(r)^2\}^2}\big(\gamma(r)^3\cos r-3\,\gamma(r)^2\sin^3 r+\gamma(r)\cos r+\sin^3 r\big)$$

$$\big(\text{ここで}\quad \gamma(r)=2r-\sin 2r\big)$$

$$\psi(x):=\frac{\sin r}{r\{1+\gamma(r)^2\}}$$

とおくと

$$\psi\in H^2(\mathbb{R}^3_x),\qquad \big(-\Delta_x+V(r)\big)\psi(x)=\psi(x)$$

が成り立つ.】

$\gamma(r)\sim 2r\ \ (r\to\infty)$ なので，$V(r)\sim -8r^{-1}\sin 2r$ となり，したがって，本質的スペクトルは $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_x+V)=[0,\infty)$ となる．それゆえ，この Schrödinger 作用素 $-\Delta_x+V$ は埋込まれた固有値 1 を持つことが結論される．

von Neumann–Wigner のアイディアは次の２点に要約される：

---

*Serge Richard 氏 (名古屋大学), 内山淳氏 (京都工芸繊維大学) との共同研究

1. Dirichlet 条件 $f(0)=0$ を満たし, かつ区間 $0<r<\infty$ 上で

$$\Big(-\frac{d^2}{dr^2}+V\Big)f=f \tag{1}$$

を満たす $L^2(0,\infty)$-関数 $f(r)$ と減衰ポテンシャル $V(r)$ を見つける;

2. $\psi(x)=r^{-1}f(r)$ とおく.
(3 次元では Δ の動径部分 $=\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dr}$ なので,

$$\big(-\Delta_x+V(r)\big)\psi=\frac{1}{r}\Big(-\frac{d^2}{dr^2}+V(r)\Big)f=\frac{1}{r}f=\psi$$

となる. また, $f(0)=0$ なので, $\psi\in H^2(\mathbb{R}^3_x)$ が成り立つ.)

(1) を満たすような f と V の組を見つける為に, [9] ではまず適当な $L^2(0,\infty)$-関数 $f(r)$ を見つけて,

$$V:=\Big(f+\frac{d^2f}{dr^2}\Big)\Big/f$$

と定義している. (実際には, von Neumann–Wigner は $f(r)=\sin r/\{1+\gamma(r)^2\}$ とおいた.) ただ, この方法で構成される Schrödinger 作用素は正固有値を (少なくとも) 1 つ持つことが保証されるだけである.

正固有値を持つ Schrödinger 作用素を構成する問題は実は大変デリケートである. 実際, Reed–Simon [6, Theorem XIII.56] から次の事実が解る : V が実数値であって, $|V(r)|\le C(1+r)^{-\rho}$, $\rho>1$, を満たすならば, $\sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta_x+V)\cap(0,\infty)=\emptyset$. したがって, Schrödinger 作用素が正の固有値を持つ為にはポテンシャルは長距離型に限られることになる. Ben-Artzi–Devinatz [3] では $V(r)=-\dfrac{k}{r}\sin 2r^{\alpha}+V_S(r)$, $|V_S(r)|\le C(1+r)^{-\rho}$, $\rho>1$, の形のポテンシャルを扱い, α の値によって (つまり, 振動の仕方によって) 正固有値が現れたり, 現れなかったりすることを示した :

- $\alpha>0,\ \ne 1 \implies \sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta+V)\cap(0,\infty)=\emptyset$;
- $\alpha=1 \implies \sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta+V)\cap(0,\infty)=\{1\}$ または $\emptyset$.

したがって, 正固有値を論じる為に適切なポテンシャルは $V(r)=-\dfrac{k}{r}\sin 2r+V_S(r)$ の形ということになる. この形のポテンシャルに限って, 歴史的な経緯のあらましを述べよう :

- (von Neumann–Wigner [9] 1929) $k=8 \implies \exists V_S$ s.t. $1\in\sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta+V)$
- (Moses–Tuan [5] 1959) $k=4 \implies \exists V_S$ s.t. $1\in\sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta+V)$

- (Arai–Uchiyama [2] 1999) $|k| > 2 \implies \exists V_S$ s.t. $1 \in \sigma_{\rm p}(-\Delta + V)$

  $|k| < 2 \implies 1 \notin \sigma_{\rm p}(-\Delta + V)$ for $\forall V_S$

Arai–Uchiyama [2] ではポテンシャル V が球対称とは限らないことを注意しておく.

2. 結果

序で述べたように, 本稿の目的は, n 個の正固有値を持つシュレディンガー作用素を構成することである. 結果を述べよう.

定理 1. $\forall n \geq 1,\ \forall \mu_1 > \forall \mu_2 > \cdots > \forall \mu_n > 0,\ \forall a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \mathrm{Re}\, a_j \geq 0\ \ (j = 1, \cdots, n)$, に対して

$$s(r) := {}^t(\sin \mu_1 r, \sin \mu_2 r, \cdots, \sin \mu_n r)$$
$$f_a(r) = {}^t\big(f_{1a}(r), \cdots, f_{na}(r)\big) := -\big(A + G(r)\big)^{-1} s(r)$$

とおき, n 個のパラメータ $a := \{a_1, \cdots, a_n\}$ に依存するポテンシャルを

$$V_a(r) := 2\frac{d}{dr}\big(< f_a(r), s(r) >\big)$$

と定める. ただし, $<\cdot, \cdot>$ は $\mathbb{C}^n$ の内積, また

$$A = \mathsf{Diag}(a_1, \cdots, a_n)$$
$$G(r) := \big(g_{ij}(r)\big)_{i,j=1}^n \quad (n \times n \text{ 行列}), \qquad g_{ij}(r) := \int_0^r \sin(\mu_i \rho) \sin(\mu_j \rho)\, \mathrm{d}\rho.$$

このとき, $\mu_1^2, \cdots, \mu_n^2$ は $\mathbb{R}^3$ 上の Schrödinger 作用素 $-\Delta + V_a$ の固有値である.

注意 1. 複素パラメータ a_j がすべて実数ならば V_a は実数値であるが, そうでない場合 V_a は複素数値である. $r \to \infty$ のときの V_a の漸近挙動は

$$V_a(r) \doteq -\frac{4}{r}\sum_{j=1}^n \mu_j \sin 2\mu_j r + \frac{8}{r^2}\Big(\sum_{j=1}^n a_j \mu_j \sin 2\mu_j r + W(r)\Big) + O(r^{-3})$$

で与えられる. ここで $W(r)$ は次のような周期関数である：

$$W(r) = \Big(\sum_{j=1}^n \sin^2 \mu_j r\Big)^2 + 2\sum_{i,j=1}^n w_{ij}(r)\, \mu_i \sin\mu_j r \cos\mu_i r,$$

$$w_{ij}(r) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\mu_i - \mu_j) r}{2(\mu_i - \mu_j)} - \dfrac{\sin(\mu_i + \mu_j) r}{2(\mu_i + \mu_j)} & (i \neq j) \\[2ex] -\dfrac{\sin 2\mu_i r}{4\mu_i} & (i = j) \end{cases}$$

このことから, $V_a(r) = -\frac{4}{r}\sum_{j=1}^{n}\mu_j \sin 2\mu_j r + V_S(r)$ と分解すると, 複素パラメータ a_j は短距離部分 $V_S(r)$ にのみ現れることが解る. 漸近展開の第2項では a_j が1次式の形で現れている. また, V_S も振動することが解る. a_j は右半平面に属する複素数であれば何でもよいので, これらの事実は, 埋込まれた固有値を不変に保つ V_S の作る関数族が如何なるものであるかについて, 一つの示唆を与えていると考えられる.

定理1の証明は Richard–Uchiyama–Umeda [7] を参照のこと.

参考文献

[1] S. Agmon, I. Herbst and S.M. Sasane, *Persistence of embedded eigenvalues*, J. Funct. Analysis **261** (2011), 451–477.

[2] M. Arai and J. Uchiyama, *On the von Neumann and Wigner potentials*, J. Differential Equations **157** no. 2 (1999), 348–372.

[3] M. Ben-Artzi and A. Devinatz, *Spectral and scattering theory for the adiabatic oscillator and related potentials*, J. Math. Phys. **20** no. 4 (1979), 594–607.

[4] J. Cruz-Sampedro, I. Herbst and R. Martínez-Avendaño, *Perturbations of the Wigner-von Neumann potential leaving the embedded eigenvalue fixed*, Ann. Henri Poincaré **3** no. 2 (2002), 331–345.

[5] H.E. Moses and S.F. Tuan, *Potentials with zero scattering phase*, Nuovo Cimento **13** no. 1 (1959), 197–206.

[6] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV, Analysis of Operators*, Academic Press, New York 1978.

[7] S. Richard, J.Uchiyama and T. Umeda, *Schrödinger operators with n positive eigenvalues: an explicit construction involving complex valued potentials*, Proc. Japan Acad. **92**, Ser.A (2016), 7 - 12.

[8] J. Uchiyama, *Simple construction of the Schrödinger operator having many positive eigenvalues*, Proceedings of the Fourth Workshop on Differential Equations, Chonnam National University, Kwangju, KOREA (1999), 197–199.

[9] J. von Neumann and E. Wigner, *Uber merkwürdige diskrete Eigenwerte*, Phys. Z. **30** (1929), 465–467.